Jacobi, Frank

Working Paper

Informationskriterien und Volatility Clustering

Arbeitspapier // Institut für Statistik und Ökonometrie, No. 32

Provided in cooperation with:
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Suggested citation: Jacobi, Frank (2005) : Informationskriterien und Volatility Clustering, Arbeitspapier // Institut für Statistik und Ökonometrie, No. 32, http://hdl.handle.net/10419/32036

Informationskriterien und volatility clustering

Frank Jacobi

Arbeitspapier Nr. 32 (Oktober 2005)

Institut für Statistik und Ökonometrie
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Fachbereich Rechts- und Wirtschafts-
wissenschaften
Haus Recht und Wirtschaft II

D 55099 Mainz

Herausgeber: Univ.-Prof. Dr. P.M. Schulze

ISSN Nr. 1430 - 2136

Informationskriterien und volatility clustering

Frank Jacobi

Gliederung

Zusammenfassung

Ein wichtiges Problem in der statistischen Analyse ist die Auswahl eines passenden Modells. Im Kontext linearer ARIMA-Modelle kann gezeigt werden, dass – die Gültigkeit bestimmter Regularitätsbedingungen vorausgesetzt – die Minimierung des Schwarz-Kriteriums zu einer konsistenten Wahl der Anzahl der Parameter in einem Modell führt, wohingegen die Schätzung der Parameterzahl mit Hilfe des Akaike-Kriteriums tendenziell zu große Modelle liefert. Ziel dieser Analyse ist es, mit Hilfe von Monte-Carlo-Experimenten die Eigenschaften des Akaike- und des Schwarz-Informationskriteriums zu untersuchen, wenn der datengenerierende Prozess GARCH-Störungen aufweist.

Summary

An important problem in statistical practise is the selection of a suitable statistical model. In the context of linear ARIMA-models it can be shown that – the validity of certain regularity conditions presupposed – the minimization from Black-criterion leads to a consistent choice of the parameters in a model whereas the estimation of the parameter number with the Akaike-criterion tendentious leads to too large models. Goal of this analysis is to examine with Monte Carlo experiments the characteristics of the Akaike- and of the Black-criterion if the data generating process exhibits GARCH-effects.

1 Einleitung

Die Grundidee der linearen Zeitreihenanalyse beruht auf der Annahme, dass die nach der Parameterschätzung verbleibenden Residuen einer Normalverteilung mit Erwartungswert Null und konstanter Varianz folgen. Aus zahlreichen empirischen Analysen ist jedoch bekannt, dass insbesondere Preisänderungsraten von Wertpapieren zwar typischerweise unkorreliert, bei weitem aber nicht stochastisch unabhängig voneinander sind. So kann in Finanzmarktdaten regelmäßig das sogenannte *volatility clustering* beobacht werden, was die bedingte Varianz zeitvariabel erscheinen lässt. Es besteht dabei die Tendenz, dass ruhige Phasen mit geringer Varianz immer wieder durch turbulente Phasen abgelöst werden, nach denen die Varianz nur langsam wieder auf das Ausgangsniveau abklingt. Darüber hinaus ist die Verteilung von Finanzmarkdaten in der Regel an den Rändern wie auch im Zentrum stärker besetzt und damit eindeutig nicht normalverteilt.

Speziell Aktien- und Wechselkurse, Zinssätze oder Wachstumsraten, wie z.B. die Inflation, weisen derartige Verhaltensmuster auf, die einen Bruch mit den klassischen linearen Zeitreihenmodellen unumgänglich machen und einen nichtlinearen Modellierungsansatz erfordern. Einen solchen lieferte Engel (1982) mit seiner Arbeit zur Analyse von Inflationsraten, in der er die sogenannten ARCH-Prozesse zur Modellierung der bedingten Varianz von Zeitreihen vorschlägt. Dies bedeutet im wesentlichen, dass – im Gegensatz zu den traditionellen linearen Zeitreihenmodellen – die bedingte Varianz eines ARCH-Prozesses nicht konstant ist, sondern von den vorangegangenen Realisierungen des Prozesses abhängt. Diese Prozesse und insbesondere eine von Bollerslev (1986) vorgeschlagene Erweiterung als GARCH-Prozess zeigten sich als geeignet, Preisvariabilität auf Finanzmärkten zu modellieren.

Zur Modellierung des bedingten Erwartungswerts von Zeitreihen haben sich in der Praxis lineare ARIMA-Modelle etabliert. Dabei wird die zu prognostizierende Zeitreihe als Linearkombination früherer Ausprägungen und Störeinflüssen modelliert, wobei jedoch die Varianz als konstant über die Zeit restringiert ist. Als Ausweg bietet sich hier die Modellierung ökonomischer Zeitreihen mittels kombinierter ARIMA-GARCH-Prozessen an, welche jedoch ein weiteres Spezifikationsproblem beinhalten. Neben der Ordnung des ARIMA-Teils muss auch diejenige des GARCH-Prozesses festgelegt werden. Hierfür werden in der Praxis neben der Analyse der Autokorrelationsfunktion und der partiellen Autokorrelationsfunktion auch die ursprünglich für ARMA-Prozesse entwickelten Modellselektionskriterien von Akaike (1973) und Schwarz (1978) besonders häufig benutzt. Um ein *Overfitting* des Modells zu vermeiden, suchen diese Kriterien einen Kompromiss zwischen der Anpassungsgüte des geschätzten Modells an die empirischen Daten und der Komplexität des Modells, gemessen an der Anzahl der geschätzten Parameter. Auch wenn die Anwendung der Informationskriterien bei der Spezifikation in der Praxis zwar weit verbreitet ist, bemerken Bollerslev, Engle und Nelson (1994, S. 3011) in ihrem Übersichtsartikel jedoch kritisch:

> *„Standard model selection criteria such as the Akaike (1973) and the Schwartz (1978) criterion have been widely used in the ARCH literature, tough their statistical properties in the ARCH context are unknown. This is particularly true when the validity of the distributional assumptions underlying the likelihood is in doubt."*

Der Frage, wie sich GARCH-Effekte auf die Spezifikation von Zeitreihenmodellen auswirken, wird in der vorliegenden Analyse mit Hilfe von Simulationsexperimenten am Beispiel des Akaike- und des Schwarz-Kriteriums nachgegangen. Durch eine geeignete Wahl der Parameter der simulierten Prozesse soll dabei auch näher untersucht werden, inwiefern die Ergebnisse durch Nichtexistenz des zweiten und/oder des vierten Moments beeinflusst werden. Insbesondere werden die drei folgenden Fragestellungen betrachtet:

(1) Experiment A untersucht, inwiefern das Akaike- und das Schwarz-Kriterium geeignet sind, die Modellordnung des zugrundeliegenden ARMA-Prozesses zu ermitteln, wenn die zufallsbedingten Schocks einem GARCH(1,1)-Prozess folgen.

(2) Im Experiment B wird der bedingte Erwartungswert als bekannt vorausgesetzt, so dass die Brauchbarkeit beider Kriterien bei der Festlegung der Ordnung des GARCH-Prozesses untersucht werden kann.

(3) Im letzten Experiment C wird der Frage nachgegangen, inwiefern die Kriterien zu einer simultanen Bestimmung der Ordnungen des ARMA- und des GARCH-Prozesses in der Lage sind.

Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der GARCH-Prozesse in Kapitel 2 werden in Kapitel 3 das Akaike- und das Schwarz-Informationskriterium kurz dargestellt und ihre Eignung zur Modellselektion diskutiert. In Kapitel 4 werden dann mit Monte-Carlo-Experimenten die Eigenschaften des Akaike- und des Schwarz-Informationskriteriums zur Modellselektion untersucht, wenn GARCH-Effekte in der Zeitreihe vorhanden sind.

2 Die GARCH-Modelle

Zur Darstellung der GARCH-Modelle im Rahmen eines Finanzmarktmodells sei eine univariate Renditezeitreihe r_t (t = 1, 2, ..., T) modelliert als

$$r_t = x_t'\gamma + \varepsilon_t \,. \tag{2.1}$$

Die Renditegleichung (2.1) zerlegt die Rendite in Periode t in einen erwarteten Teil ($x_t'\gamma$) und eine unerwartete stochastische Komponente ε_t. Gegeben der am Periodenanfang zur Verfügung stehenden Informationsmenge Ω_{t-1} kann der erwartete Teil der Rendite r_t mit einem $(k \times 1)$-Vektor erklärender Variablen x_t und dem entsprechenden $(k \times 1)$-Vektor der Regressionskoeffizienten γ prognostiziert werden. Erklärende Variablen können sowohl exogene Größen, als auch gelagte Werte der abhängigen Variable sein.

Die latente Variable ε_t folgt dabei annahmegemäß einem GARCH(p,q)-Prozess, falls die auf Ω_{t-1} bedingte Verteilung von ε_t gegeben ist durch

$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \sim \mathrm{NV}(0, \sigma_t^2) \tag{2.2}$$

und

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \,, \tag{2.3}$$

wobei p, q $\geq$ 0 die Ordnungen des GARCH-Prozesse beschreiben. Die Normalverteilungsannahme für die bedingte Residuenverteilung in (2.2) ist für eine allgemeine Definition von GARCH-Prozessen keineswegs zwingend, sondern wird lediglich zur Vereinfachung getroffen. Für q = 0 enthält das GARCH(p,q)-Modell das ursprüngliche ARCH-Modell von Engle (1982) als Spezialfall. Der wesentliche Vorteil in der Berücksichtigung gelagter bedingter Varianzen σ_{t-j}^2 liegt jedoch darin, dass auf diese Art eine große Anzahl gelagter Schocks ε_{t-i}^2, mit einer sparsameren Parametrisierung berücksichtigt werden kann. So kann formal gezeigt werden, dass ein GARCH(p,q)-Prozess als ein ARCH(∞)-Prozess dargestellt werden kann (Bollerslev, 1986, S. 309).

Die Koeffizienten α_i und β_j der Varianzgleichung (2.3) unterliegen dabei einigen Restriktionen, um die Existenz der bedingten Varianz σ_t^2 zu garantieren. So verhindern die Bedingungen $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ mit i = 1, ..., p und $\beta_j \geq 0$ mit j = 1, ..., q, dass die bedingte Varianz negativ wird. Gleichung (2.3) ist dann eine monoton steigende Funktion quadrierter verzögerter Residuen und verzögerter bedingter Varianzen. Große vergangene Schocks ε_{t-i} vergrößern somit die Varianz der nächsten Periode, so dass weitere große Renditen wahrscheinlicher werden, und damit dem bei Finanzmarktdaten häufig beobachtbaren *volatility clustering* Rechnung getragen werden kann.

Wenn zusätzlich

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1 \tag{2.4}$$

eingehalten wird, ist der Prozess kovarianzstationär, und die unbedingte Varianz ist endlich und berechnet sich mit

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i - \sum_{j=1}^{q}\beta_j}. \tag{2.5}$$

In empirischen Untersuchungen, insbesondere bei hochfrequenten Finanzmarktdaten, hat sich in vielen Fällen gezeigt, dass die Stationaritätsbedingungen (2.4) oft nur knapp oder gar nicht erfüllt waren (Lamoureux und Lastrapes, 1990, S. 228). Ist die Summe in (2.4) größer oder gleich Eins, hat das autoregressive Polynom der Gleichung (2.3) eine Einheitswurzel, womit die unbedingte Varianz von ε_t nicht existiert oder unendlich groß werden kann. In diesem Fall können auf der Stationaritätsbedingung beruhende Signifikanztests zu falschen Entscheidungen führen und zudem keine brauchbaren Prognosen zukünftiger Varianzen mehr erwartet werden.

Während weiter gezeigt werden kann, dass der Schiefekoeffizient von ε_t aufgrund der angenommenen Normalverteilung Null beträgt, gilt für dessen Kurtosis, dass diese den Wert 3 einer Normalverteilung mit

$$k = \frac{6\alpha_1^2}{1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2}. \tag{2.6}$$

übersteigt (Bollerslev, 1986, S. 311 f.).

Somit sind GARCH-Prozesse in der Lage, neben der Volatilitätsclusterung auch die im Vergleich zur Normalverteilung höheren Wahrscheinlichkeiten von extremen Werten zu modellieren.

3 Informationskriterien

Ein in der Praxis weit verbreitetes Hilfsmittel bei der Wahl eines passenden Modells stellen dabei neben der Analyse der Autokorrelationsfunktion und der partiellen Autokorrelationsfunktion auch die Informationskriterien von Akaike (1973) und Schwarz (1978) dar.
Vor dem Hintergrund, dass mit höher parametrisierten Modellen aufgrund der besseren Datenanpassung häufig schlechtere Prognoseeigenschaften einhergehen, suchen diese Kriterien einen Kompromiss zwischen der Datenanpassung und der Anzahl der benutzten Parameter. Das hinzufügen zusätzlicher Lags für p und q steigert zwar notwendigerweise die Anpassungsgüte des Modells, jedoch hat das Hinzufügen neuer Lags auch die Schätzung der zusätzlichen Koeffizienten und somit ein Verlust von Freiheitsgraden zur Folge. Die Idee der Informationskriterien ist daher, die Güte der Datenanpassung mit einem Komplexitätsmaß zu gewichten, welches umso größer wird, je höher die Lag-Ordnungen p bzw. q des Prozesses sind (Enders, 1995, S. 88).
Dabei ist den hier verwendeten Informationskriterien gleich, dass sie in zwei verschiedenen Formulierungen vorliegen. Entweder ist das Maß für die Anpassungsgüte als die maximale Likelihood l oder die minimale Varianz der Residuen $\hat{\sigma}^2$ formuliert. Bezeichnet $l(\hat{\theta})$ den Wert der maximierten Likelihoodfunktion, k die Anzahl der Parameter im Modell und T die Anzahl der Beobachtungen, dann lässt sich das Akaike-Informationskriterium (AIC) in wie folgt darstellen:

$$AIC = -2l(\hat{\theta}) + 2k \quad \text{bzw.} \tag{3.1}$$

$$AIC = T\ln(\hat{\sigma}^2) + 2k\,. \tag{3.2}$$

Das Schwarz-Informationskriterium (SIC) ist gegeben durch:

$$SIC = -2l(\hat{\theta}) + k\ln(T) \quad \text{bzw.} \tag{3.3}$$

$$SIC = T\ln(\hat{\sigma}^2) + k\ln(T)\,. \tag{3.4}$$

Nach Berechnung der Werte der Informationskriterien für verschiedene Parametrisierungen wird das Modell ausgewählt, für welches das Kriterium den minimalen Wert annimmt.

Formal unterscheiden sich beide Kriterien dabei lediglich in ihrem Komplexitätsmaß. Da in der Regel ln(T) > 2 gilt, wählt das AIC systematisch etwas größere Modellordnungen als das SIC. Insbesondere für ARMA-Prozesse lässt sich unter bestimmten Bedingungen

sogar zeigen, dass das AIC weder schwach noch stark konsistent ist (Hannan, 1980, S. 1072). Zur Definition der Konsistenzarten siehe Schlittgen/Streitberg (1997, S. 339 f.). Da das AIC im Gegensatz zum SIC jedoch asymptotisch effizient ist, werden häufig beide Kriterien in der Praxis angewendet (Diebold, 2001, S. 87 ff.).
Die asymptotischen Eigenschaften des SIC wurden von Hannan (1980, S. 1071) untersucht. Er kommt dabei zu dem Ergebnis, dass unter den Bedingungen

$$E(\varepsilon_t) = 0\ , \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma^2\ , \quad Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_s) = 0 \text{ für } t \neq s \tag{3.5}$$

und

$$E(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}) = 0\ , \quad E(\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}) = \sigma^2\ , \quad \mathrm{E}(\varepsilon_t^4) < \infty \tag{3.6}$$

das SIC schwach konsistent ist (Theorem 3, S. 1073).
Sind Bedingungen (3.5) und (3.6) erfüllt und zusätzlich die ε_t unabhängig verteilt, so ist das SIC stark konsistent (Theorem 1, S. 1073). Sind die ε_t nicht unabhängig verteilt aber die Bedingungen (3.5), (3.6) und $E(|\varepsilon|^{\nu}) < \infty$ mit $\nu > 4$ erfüllt, dann ist das SIC stark konsistent (Theorem 1, S. 1073).

Vergleicht man die Eigenschaften von GARCH-Prozessen mit den von Hannan gemachten Annahmen über ε_t, so wird deutlich, dass die zum Nachweis der starken Konsistenz an ε_t gestellten Bedingungen der stochastische Unabhängigkeit und der Existenz der unbedingten Momente höherer Ordnung von GARCH-Prozessen generell nicht erfüllt werden. Hinweise auf eine eventuelle schwache Konsistenz des SIC sollen in dieser Studie nun mit Hilfe von Simulationsexperimenten erbracht werden.

4 Ein Monte-Carlo-Experiment

In den folgenden Simulationsexperimenten wird davon ausgegangen, dass der bedingte Erwartungswert aus (2.1) durch einen AR(2)-Prozess der Form

$$r_t = 0{,}5r_{t-1} + 0{,}4r_{t-2} + \varepsilon_t \tag{4.1}$$

festgelegt ist, wobei $E(\varepsilon_t) = 0$ und $Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_s) = 0$ für $t \neq s$ gilt. Die gewählte Parameterkonstellation garantiert dabei, dass alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung von (4.1) außerhalb des Einheitskreises liegen, so dass der AR-Prozess schwach stationär ist.

Weiterhin wird davon ausgegangen, dass der datengenerierende Prozess für ε_t ein GARCH(1,1)-Prozess ist mit

$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \sim NV(0,\sigma_t^2) \qquad \text{und} \tag{4.2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 . \tag{4.3}$$

Insgesamt erfordert die AR(2)-GARCH(1,1)-Spezifikation somit die Schätzung der folgenden fünf Parameter γ_1, γ_2 (bedingter Erwartungswert) sowie α_0, α_1, β_1 (GARCH-Fehlerterm). Inwiefern die Ergebnisse durch die (Nicht-)Existenz des unbedingten zweiten und/oder vierten Moments beeinflusst werden, soll durch eine geeignete Variation der Parameter des GARCH(1,1)-Prozesses untersucht werden. Die verschiedenen Parameterkonstellationen sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Die Wahl der Parameter des GARCH-Prozesses im ersten Experiment garantiert, dass die ersten vier unbedingten Momente von ε_t existieren, wohingegen in dem zweiten Experiment das vierte Moment nicht mehr existiert. Parameterkonstellation III beschreibt einen integrierten GARCH(1,1)-Prozess.

Parameter	I	II	III
α_0	0,01	0,05	0,01
α_1	0,15	0,30	0,15
β_1	0,80	0,65	0,85
Varianz	0,20	1,00	-
Kurtosis	5,57	-	-

Tabelle 1 Parameterkonstellationen der simulierten GARCH(1,1)-Prozesse.

Neben den Parametern der GARCH-Prozesse wird auch der Beobachtungsumfang T variiert. Es werden Auswertungen für T = 100 und T = 1000 vorgenommen.

Simulationsergebnisse

Um Aussagen über die Auswirkungen von GARCH-Effekten auf die Treffsicherheit der Modellselektionskriterien treffen zu können, werden in einem ersten Experiment AR(2)-Prozesse gemäß (4.1) mit homoskedastischen Residuen simuliert und AR(p)-Prozesse der Ordnungen p = 1, ..., 8 mit Hilfe der Kleinsten-Quadrate-Methode an die simulierten Daten angepasst. Die Ergebnisse der Simulationsexperimente sind in Tabelle 2 dokumentiert. Dabei stehen im Tabelleninneren die absoluten Häufigkeiten, mit denen das jeweilige Informationskriterium eine Modellordnung von 1 bis 8 ausgewählt hat. Die Häufigkeitsverteilung bekräftigt dabei die von Hannan (1980) bewiesenen Eigenschaften der Modellselektionskriterien. Wie erwartet neigt das AIC deutlich zu einer Überschätzung der wahren Modellordnung, während das SIC mit einer Trefferquote von 97,0% für T = 100 bzw. 98,8% für T = 1000 deutlich bessere Schätzungen der wahren Modellordnung liefert.

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	-	**704**	152	53	16	33	31	11
SIC	10	**970**	18	2	-	-	-	-

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	-	**739**	100	87	43	11	13	7
SIC	-	**988**	12	-	-	-	-	-

Tabelle 2 Gewählte Modellordnungen für T = 100 (oben) und T = 1000 (unten).

Experiment A

Experiment A untersucht nun, inwiefern das AIC- und das SIC-Kriterium geeignet sind, die Modellordnung des zugrundeliegenden AR(2)-Prozesses zu ermitteln, wenn die Innovationen durch einen GARCH(1,1)-Prozess erzeugt wurden. Dazu werden AR(p)-Prozess der Ordnungen p = 1 bis p = 8 mit Hilfe der Kleinsten-Quadrate-Methode an die simulierten Daten angepasst und die Werte des AIC und SIC gemäß (3.2) und (3.4) ermittelt. In jedem der 1000 Simulationsexperimenten wird dasjenige AR(p)-Modell ausgewählt, für welches das verwendete Kriterium minimal wird.

Die Ergebnisse der Simulationsexperimente sind in den Tabellen 2 bis 4 dokumentiert. Dabei stehen im Tabelleninneren wiederum die absoluten Häufigkeiten, mit denen das jeweilige Kriterium eine Modellordnung von 1 bis 8 ausgewählt hat. Für den Fall, dass die Prozessinnovationen einem GARCH(1,1)-Prozess mit endlichem zweitem und viertem Moment folgen, ergibt sich folgendes Bild:

Wie erwartet neigt das AIC deutlich zu einer Überschätzung der wahren Modellordnung, während das SIC mit einer Trefferquote von 58,9% bis 82,3% die wahre Modellordnung deutlich exakter schätzt. Überraschend ist dabei zunächst, dass die Häufigkeit mit der beide Kriterien die Modellordnung überschätzen, mit zunehmendem Stichprobenumfang sogar noch erheblich zunimmt. Für einen simulierte Zeitreihe mit T = 1000 erkennt das AIC nur noch in 24,5% der Fälle die wahre Modellordnung. In 51,4% der Fälle wird sogar eine Modellordnung von größer oder gleich 6 diagnostiziert.

Darüber, wie sich unterschiedliche Parameterkonstellationen des GARCH-Prozesses auf die Kriterien auswirken, kann festgehalten werden, dass beide Kriterien in der Regel öfters zu einer Überschätzung der wahren Modellordnung neigen. Insbesondere die schlechten Ergebnisse mit Parameterkonstellation III deuten darauf hin, dass Integration in der bedingten Varianz des Prozesses das Problem verschärft. So wird für einen Stichprobenumfang von T = 1000 und Integration in der Varianz (Tabelle 4) die wahre Modellordnung von dem AIC nur noch in 21% der Fälle richtig diagnostiziert.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass beide Kriterien insbesondere für große Stichprobenumfänge für die Bestimmung der Modellordnung des zugrunde liegenden AR-Prozesses wenig geeignet sind. Ein Grund für das Versagen der Modellselektionskriterien bei der Auswahl des korrekten Modells für T = 1000 mag darin zu suchen sein, dass die Clusterbildung mit zunehmender Stichprobengröße häufiger auftritt als bei kleinen Beobachtungsumfängen. Es kann somit festgehalten werden, dass die Existenz von Volatilitätsclustern eine spürbare Verschlechterung der Treffsicherheit der betrachteten Informationskriterien nach sich zieht.

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	-	**583**	137	83	42	58	52	45
SIC	23	**823**	84	46	13	5	3	3

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	-	**245**	73	69	99	143	166	205
SIC	-	**589**	142	89	53	39	46	42

Tabelle 3 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation I für T = 100 (oben) und T = 1000 (unten)

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	3	**556**	124	133	45	52	36	51
SIC	14	**814**	96	45	34	2	7	2

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	-	**305**	118	94	88	114	135	146
SIC	-	**693**	94	98	56	23	21	15

Tabelle 4 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation II für T = 100 (oben) und T = 1000 (unten)

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	8	**532**	128	96	89	57	53	37
SIC	43	**880**	28	24	12	6	5	2

	1	**2**	3	4	5	6	7	8
AIC	-	**215**	88	123	103	132	132	176
SIC	-	**680**	113	64	49	35	37	22

Tabelle 5 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation III für T = 100 (oben) und T = 1000 (unten)

Ergebnisse Experiment B

Im Experiment B wird nun der bedingte Erwartungswert als bekannt vorausgesetzt, so dass die Eignung der ursprünglich für ARMA-Prozesse aufgestellten Modellselektionskriterien zur Schätzung der Ordnungen von GARCH-Prozessen untersucht werden kann. Da sich GARCH-Prozesse in eine äquivalente ARMA-Darstellung überführen lassen (Bollerslev, 1985, S. 310), können entsprechende Simulationsergebnisse erwartet werden.

Der den Simulationen zugrundliegende datengenerierende Prozess ist wiederum ein GARCH(1,1)-Prozess mit den in Tabelle 1 beschriebenen Parameterkonstellationen. Mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode werden GARCH-Prozesse der Ordnungen (8,0), (1,1), (1,2), (2,2) und (2,2) geschätzt und die Modellselektionskriterien gemäß (3.1) und (3.3) berechnet. Es wird wiederum dasjenige Modell als das passende ausgewählt, für welches das verwendete Kriterium minimal ist. In den Tabellen 6 bis 8 sind die Ergebnisse der Simulationsexperimente festgehalten.

	(8,0)	**(1,1)**	(2,1)	(1,2)	(2,2)
AIC	113	**317**	187	198	185
SIC	4	**895**	36	41	24

	(8,0)	**(1,1)**	(2,1)	(1,2)	(2,2)
AIC	18	**383**	112	130	257
SIC	-	**934**	27	21	18

Tabelle 6 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation I für T = 100 (oben) und T = 1000 (unten)

	(8,0)	**(1,1)**	(2,1)	(1,2)	(2,2)
AIC	104	**301**	143	166	286
SIC	9	**803**	56	62	70

	(8,0)	**(1,1)**	(2,1)	(1,2)	(2,2)
AIC	245	**332**	58	66	299
SIC	2	**893**	25	17	64

Tabelle 7 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation II für T = 100 (oben) und T = 1000 (unten)

	(8,0)	**(1,1)**	(2,1)	(1,2)	(2,2)
AIC	343	**263**	103	96	195
SIC	11	**587**	104	112	186

	(8,0)	**(1,1)**	(2,1)	(1,2)	(2,2)
AIC	247	**293**	76	75	309
SIC	24	**753**	23	21	179

Tabelle 8 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation III für T = 100 (oben) und T = 1000 (unten)

Wird als datengenerierender Prozess ein schwach stationärer GARCH(1,1)-Prozess angenommen, liegt die Trefferquote des Akaike-Kriteriums maximal bei 38,3%. Es erweist sich somit wiederum als untauglich, die wahre Modellordnung des datengenerierenden Prozesses zu schätzen. Betrachtet man lediglich das SIC, so zeigt sich mit 58,7% bis 93,4% eine insgesamt gute bis befriedigende Trefferquote. Auffällig ist, dass nun insbesondere für kleine Stichprobenumfänge (T = 100) beide Kriterien die wahre Modellordnung deutlich schlechter schätzen. Ein Grund hierfür mag nun sein, dass mit größeren Stichprobenumfängen die GARCH-Effekte zunehmend häufiger auftreten und somit eine verlässlichere Schätzung der GARCH-Parameter ermöglicht wird.

Die Ergebnisse in Tabelle 6 und 7 zeigen die Auswirkungen, wenn der datengenerierende Prozess kein endliches viertes unbedingtes Moment besitzt oder gar integriert ist. Die Modellselektionskriterien erkennen die wahre Modellordnung wie erwartet zunehmend schlechter. So erkennt das AIC für T = 100 die wahre Modellordnung im Fall eines integrierten GARCH-Prozesses die wahre Modellordnung nur noch in 26,3%, und das SIC nur noch in 58,7% der Fälle richtig.

Insgesamt lassen die Ergebnisse vermuten, dass insbesondere für große Stichprobenumfänge das SIC sich als ein brauchbares Instrument zur Bestimmung der Ordnung von GARCH-Prozessen darstellt.

Ergebnisse Experiment C

Im letzten Experiment stellt sich die Frage, inwiefern die Selektionskriterien zu einer simultanen Bestimmung der Ordnung des AR- und des GARCH-Teils in der Lage sind. Aufgrund des Rechenaufwands wird nun lediglich von einem schwach stationären GARCH(1,1)-Prozess ausgegangen. Mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode werden nun für alle Kombinationen p = 1, ..., 5 (AR-Teil) und (p,q) = (1,1), (1,2), (2,1) und (2,2) für den GARCH-Teil die Parameter geschätzt und die Modellselektionskriterien gemäß (3.1) und (3.3) berechnet. Es wird wiederum dasjenige Modell als das passende ausgewählt, für welches das verwendete Kriterium minimal ist.

Die Ergebnisse der Simulationsläufe sind in Tabelle 8 und 9 festgehalten. Bei einer simultanen Festlegung der AR- und der GARCH-Ordnung treffen für T = 100 das AIC und das SIC lediglich in 23% bzw. in 47,2% der der Fälle die richtige Entscheidung, wobei eine Überschätzung der Ordnung des AR-Teils die Regel ist. Eine Erhöhung des Stichprobenumfangs von T = 100 auf T = 1000 führt bei beiden Kriterien zu einer deutlichen Verbesserung der Trefferquote, die jedoch insbesondere für das AIC mit 58,8% weiterhin gering ist. Das SIC erkennt die wahre Modellordnung nun in 94,5% der Fälle richtig und kann somit als ein geeignetes Hilfsmittel bei der Spezifikation von ARMA-GARCH-Prozessen angesehen werden

(p,q)	1	2	3	4	5	Σ
(1,1)	1	**230**	138	114	73	556
(1,2)	2	174	112	68	87	443
(2,1)	-	1	-	-	-	1
Σ	3	405	250	182	160	1000

(p,q)	1	2	3	4	5	Σ
(1,1)	3	**472**	137	72	19	703
(1,2)	1	201	73	14	8	297
(2,1)	-	-	-	-	-	-
Σ	4	673	210	86	27	1000

Tabelle 9 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation I für T = 100 des AIC (oben) und des SIC (unten).

(*p*,*q*)	1	2	3	4	5	Σ
(1,1)	-	**588**	106	85	48	827
(1,2)	-	142	12	13	-	167
(2,1)	-	6	-	-	-	6
Σ	-	736	118	98	48	1000

(*p*,*q*)	1	2	3	4	5	Σ
(1,1)	-	**945**	17	5	-	967
(1,2)	-	24	8	-	-	32
(2,1)	-	1	-	-	-	1
Σ	-	970	25	5	-	1000

Tabelle 10 Gewählte Modellordnungen bei Parameterkonstellation I für T = 1000 des AIC (oben) und des SIC (unten).

Wie sich eine Variation der GARCH-Parameter auf die Eigenschaften der Modellselektionskriterien auswirkt, wurde an dieser Stelle nicht weiter untersucht. Es kann jedoch davon ausgegangen werden, dass beide Verfahren die wahre Modellordnung zunehmend schlechter erkennen, sofern das vierte unbedingte Moment nicht existiert oder gar ein integrierter GARCH-Prozess vorliegt.

5 Zusammenfassung

Ziel dieser Analyse war es, mit Monte-Carlo-Experimenten die Eigenschaften des Akaike- und des Schwarz-Informationskriteriums zur Modellselektion zu untersuchen, wenn der datengenerierende Prozess GARCH-Störungen aufweist.

In einem ersten Simulationsexperiment wurden die Auswirkungen von GARCH-Effekten auf das AIC und das SIC untersucht, wenn lediglich die Ordnung des AR-Prozesses bestimmt werden soll. Dabei hat sich herausgestellt, dass beide Kriterien versagen, die richtige Modellordnung zu erkennen. Beide Kriterien schneiden sogar umso schlechter ab, je größer die simulierte Stichprobe ausfällt. Es kann somit nicht davon ausgegangen werden, dass die Kriterien in einem solchen Szenario konsistent sind.

Ziel des zweiten Experiments war die Bestimmung der Ordnung des GARCH-Teils. Hierfür erwies sich insbesondere für große Stichproben das SIC als recht brauchbar. Bei Nichtexistenz des zweiten und vierten unbedingten Moments erkennt das SIC die wahre Modellordnung jedoch merklich schlechter.
In der dritten Reihe von Simulationsexperimenten wurde untersucht, inwiefern die Kriterien zu einer simultanen Bestimmung der Ordnung des AR-Teils und des GARCH-Teils in der Lage sind, wobei sich hier auf einen schwach stationären GARCH-Prozess beschränkt wurde. Dabei hat sich gezeigt, dass das SIC ein recht brauchbares Instrument für eine simultane Bestimmung der Ordnungen kombinierter AR-GARCH-Prozesse ist. Es kann jedoch vermutet werden, dass im Falle integrierter GARCH-Prozesse sich die Eigenschaften entsprechend verschlechtern.

Allgemeine Rückschlüsse auf die Eignung der Modellselektionskriterien lassen sich durch die Simulationsexperimente sicherlich nicht ziehen, die Ergebnisse lassen aber vermuten, dass das Schwarz-Kriterium schwach konsistent ist, wohingegen das Akaike-Kriterium als Modellselektionsverfahren in den meisten Fällen versagt.

Literatur

[1] Akaike, H. (1973), Information theory and the extension of the maximum likelihood principle. In B.N. Petrov und F. Csaki: 2nd International Symposium on Information Theory, S. 267-281, Akadémiai Kiadó, Budapest.

[2] Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31, S. 307-327.

[3] Bollerslev, T., Engle, R. F., Nelson, D. (1994) ARCH Models, in: Handbook of Econometrics, (hrsg. v.) Engle, R., McFadden D., North Holland Press, Amsterdam, S. 2959-3038.

[4] Diebold, F. (2001) Elements of Forecasting, South-Western, Cincinnati.

[5] Enders, W. (1995) Applied Econometric Time Series, John Wiley & Sons, New York.

[6] Engle, R. F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates on the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica 50, S. 987-1007.

[7] Hannan, E. J. (1980) The estimation of the order of an ARMA process, The Annals of Statistics 5, S. 1071-1081.

[8] Lamourex, C. G., Lastrapes, W. D. (1990) Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH-Model, Journal of Business and Economic Statistics 8, S. 225-234.

[9] Schlittgen, R, Streitberg, B. H. J. (1997) Zeitreihenanalyse, Oldenbourg, Münchnen.

[10] Schwarz, G. (1978), Estimating the dimension of a model', The Annals of Statistics 6, S. 461 – 464.

Autor: Dipl.-Kfm. Frank Jacobi, Projektbearbeiter

Bisher erschienene Arbeitspapiere:

1. Peter M. Schulze, Prognoseverfahren wissenschaftlicher Institute in der Bundesrepublik Deutschland. Überblick über eine Umfrage (Dezember 1993)
2. Martina Nold / Peter M. Schulze, Möglichkeiten und Grenzen der Quantifizierung der Schattenwirtschaft (April 1994)
3. Armin Seher, Einfluß der Integrationsordnung bei Zeitreihen auf die Spezifikation von Fehlerkorrekturmodellen (Juni 1994)
4. Lars Berg / Armin Gemünden / Frank Hubert / Ralf Leonhardt / Michael Leroudier, Die Situation der Studentenschaft in den Wirtschaftswissenschaften an der Universität Mainz im Frühjahr 1994. Ergebnisse einer Umfrage (August 1994)
5. Christoph Balz, Ein Fehlerkorrekturmodell zur Entwicklung des Kapitelmarktzinses in der Bundesrepublik Deutschland (Oktober 1994)
6. Reinhard Elkmann / Nora Lauterbach / Stephan Wind, Tertiärisierung regionaler Wirtschaftsstrukturen. Eine empirische Analyse kreisfreier Städte und Landkreise in Hessen, Rheinland-Pfalz und dem Saarland (Dezember 1994)
7. Peter M. Schulze / Uwe Spieker, Deutsche Aktienindizes. Statistische Konzepte und Beispiele (Dezember 1994)
8. Armin Seher / Peter M. Schulze, Fehlerkorrekturmodelle und die Bewertung von Aktienkursindizes. Empirische Analyse zur Eignung des Konzepts (Januar 1995)
9. Reinhard Elkmann / Annette Klostermann / Kerstin Lieder, Zur intertemporalen Konstanz der Struktur regionaler Lohn- und Gehaltsniveaus in der Bundesrepublik Deutschland (Mai 1995)
10. Christoph Fischer, Ein Fehlerkorrekturmodell zur Kaufkraftparitätentheorie (März 1996)
11. Ralf Becker / Claudia Müller, Zur Schätzung regionaler Konsumfunktionen (Oktober 1996)
12. Frank Hubert, Klassifizierung der Arbeitsmärkte in den OECD-Ländern mittels Cluster- und Diskriminanzanalyse (April 1997)
13. Frank Hubert, Das Okun'sche Gesetz: Eine empirische Überprüfung für ausgewählte OECD-Länder unter besonderer Berücksichtigung der nationalen Arbeitsmarktordnungen (September 1997)
14. Christoph Balz/ Peter M. Schulze, Die Rolle nationaler, regionaler und sektoraler Faktoren für die Variation von Output, Beschäftigung und Produktivität in der Bundesrepublik Deutschland (Dezember 1997)
15. Peter M. Schulze, Steigende Skalenerträge und regionales Wachstum: Eine quantitative Analyse mit kleinräumigen Daten (März 1998)
16. Ralf Becker, Die Verallgemeinerte Momentenmethode (Generalized Method of Moments - GMM). Darstellung und Anwendung (Juni 1998)
17. Peter M. Schulze, Regionales Wachstum: Sind die Dienstleistungen der Motor? (August 1998)
18. Ke Ma, Absatzanalyse für den chinesischen Pkw-Markt (Oktober 1998)

19. Christoph Balz / Peter M. Schulze, Die sektorale Dimension der Konvergenz. Eine empirische Untersuchung für die Bundesrepublik Deutschland (Januar 1999)

19. Christoph Balz / Peter M. Schulze, Die sektorale Dimension der Konvergenz. Eine empirische Untersuchung für die Bundesrepublik Deutschland (Januar 1999)

20.[*] Robert Skarupke, Quantifizierung des Heimvorteils im deutschen Profifußball: Eine empirische Untersuchung für die 1. Fußball-Bundesliga (August 2000)

21.[*] Peter M. Schulze, Regionalwirtschaftlicher Datenkatalog für die Bundesrepublik Deutschland (September 2000)

22.[*] Yvonne Lange, Ein logistisches Regressionsmodell zur Analyse der Verkehrsmittelwahl im Raum Mainz (Oktober 2000)

23.[*] Verena Dexheimer, Zähldatenmodelle (Count Data Models). Ansätze und Anwendungen (Mai 2002)

24.[*] Andreas Handel, Die Entwicklung des Geldvermögens der privaten Haushalte in Deutschland (September 2003)

25.[*] Christina Bastian / Yvonne Lange / Peter M. Schulze, Hedonische Preisindizes - Überblick und Anwendung auf Personalcomputer (Mai 2004)

26.[*] Alexander Prinz / Peter M. Schulze, Zur Entwicklung von Containerschiffsflotten - Eine Paneldatenanalyse (Mai 2004)

27.[*] Martin Flohr, Analyse der ökonomischen und demografischen Determinanten von Sportaktivitäten in Deutschland (Juni 2004)

28.[*] Peter M. Schulze, Granger-Kausalitätsprüfung. Eine anwendungsorientierte Darstellung (Juli 2004)

29.[*] Kristina Ripp / Peter M. Schulze, Konsum und Vermögen - Eine quantitative Analyse für Deutschland (August 2004)

30.[*] Andreas Schweinberger, Ein VAR-Modell für den Zusammenhang zwischen Öffentlichen Ausgaben und Wirtschaftswachstum in Deutschland (November 2004)

31.[*] Frank Jacobi, ARCH-Prozesse und ihre Erweiterungen - Eine empirische Untersuchung für Finanzmarktzeitreihen (April 2005)

32.[*] Frank Jacobi, Informationskriterien und volatility clustering (September 2005)

[*] Im Internet unter http://www.statoek.vwl.uni-mainz.de/ verfügbar.